Tentamen ART, voorjaarssemester 2010

Vermeld op elk blad je naam en studentnummer. Onleesbaar=fout! Bij gebruik van computer-algebra de output ook meegeven. Samenwerken mag, vermeld het dan. Ook gezamenlijk inleveren van één werkstuk mag, iedereen die daaraan meedoet krijgt hetzelfde punt. De uiterste inleverdatum is VRIJDAG 16 JULI, 12:00. In te leveren bij het secretariaat HEF. Uitwerkingen die op welke andere manier dan ook worden ingeleverd (bv ergens op een tafel, onder de deur door geschoven, etc) worden NIET beoordeeld. Ik raad je aan om van je werkstuk een kopie voor jezelf te maken!

De Kerr metriek

De Kerr metriek is een variant van de Schwarzschild metriek. We gebruiken weer als coordinaten de tijd t, en poolcoordinaten r, θ en ϕ. De metriek wordt dan gegeven door

$$
\begin{aligned}
(ds)^2 &= \left(1 - \frac{R_s r}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right) c^2 (dt)^2 \qquad (1)\\
&- \left(\frac{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}{r^2 - R_s r + a^2}\right)(dr)^2 \\
&- \left(r^2 + a^2\cos(\theta)^2\right)(d\theta)^2 \\
&- \left(r^2 + a^2 + \frac{R_s r a^2 \sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right)\sin(\theta)^2 (d\phi)^2 \\
&+ 2\frac{c R_s r a \sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}(dt)(d\phi)
\end{aligned}
$$

Je kunt deze metriek verifiëren op de Engelstalige Wikipedia site onder 'Kerr metric'. R_s is natuurlijk weer de Schwarzschild straal, en a is een vaste parameter, ook met de dimensie van een lengte.

1. Laat zien dat voor $r \to \infty$ deze metriek de Minkowski metriek benadert.
2. Laat zien dat voor $a = 0$ de Schwarzschild metriek verkregen wordt.
3. Laat zien dat het hier een *roterend* coordinatensysteem betreft.
4. Laat zien dat deze metriek geschikt is voor de lege ruimte in de zin dat de Ricci tensor $R_{\mu\nu} = 0$. Dit is rechttoe-rechtaan met de MAPLE code, maar niet triviaal! Let op: als je van een grote uitdrukking wilt laten zien dat ze nul is, is het genoeg te laten zien dat de *teller* nul is (MAPLE commando 'numer'). De commando's 'simplify' en 'factor' kunnen ook behulpzaam zijn. Het beste is het elke component van de Ricci tensor apart te behandelen.

5. Vind de geodetische vergelijkingen. Je hoeft ze niet expliciet te copieren in je antwoord, maar we gaan ze wel gebruiken. Geef de geodetische vergelijking voor θ wel. Laat zien dat beweging langs de equator, dwz met $\theta = \pi/2$ constant, een oplossing is van deze geodetische vergelijking. We zullen in het vervolg $\theta = \pi/2$ aannemen.

6. Neem aan dat we met een cirkelbaan te maken hebben, zodat $r(s) = r$, een constante. Laat zien dat de geodetische vergelijkingen voor t en ϕ nu luiden
$$\ddot{t} = 0 \quad , \quad \ddot{\phi} = 0$$
en dat we zonder verlies van algemeenheid mogen aannemen
$$t(s) = u\, s \quad , \quad \phi(s) = \psi\, s$$

7. Laat zien dat de geodetische vergelijking voor r nu impliceert dat
$$R_s c^2 u^2 - 2cR_s au\psi - 2\psi^2 r^3 + \psi^2 a^2 R_s = 0$$

8. We nemen altijd aan dat $u > 0$: waarom ?

9. Laat zien dat er nu twee oplossingen voor het verband tussen u en ψ zijn:
$$\begin{aligned} \text{als } \psi > 0 \quad &: \quad u = \psi \left(\frac{\sqrt{2}}{c} r^{3/2} {R_s}^{-1/2} + \frac{a}{c} \right) \quad , \\ \text{als } \psi < 0 \quad &: \quad u = -\psi \left(\frac{\sqrt{2}}{c} r^{3/2} {R_s}^{-1/2} - \frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

10. We stellen ons twee puntdeeltjes voor die bij gelijke r equatoriale cirkelbanen beschrijven in *tegengestelde* richting. Dwz voor het ene deeltje is ψ positief, voor het andere negatief. Let op! Het is niet gezegd dat de twee ψ waarden precies tegengesteld zijn (in feite zijn ze dat niet). We laten de deeltjes tegelijkertijd en op hetzelfde punt met hun baan beginnen. Laat zien dat na het voltooien van een volledige cirkel de booglengte van elk deeltje de waarde $2\pi/|\psi|$ zal hebben (voor elk deeltje zijn eigen toepasselijke ψ).

11. Laat zien dat de twee deeltjes hun volleidge cirkelbaan *niet* op hetzelfde moment volbrengen : welk tijdinterval zit er tussen hun aankomsten?

Kosmische snaar

In sommige theorieen wordt het bestaan voorspeld van zgn kosmische snaren. Dit zijn oneindig lange, infinitesimaal dunne structuren met een grote massa en trekspanning. We gaan de metriek rond zo'n snaar berekenen, waarbij we aannemen dat de snaar langs een rechte lijn in de z richting loopt. Uiteraard ligt de oorsprong van het ruimtelijke gedeelte van onze coordinaten op de snaar.

1. Beargumenteer dat de metriek *cylinder*-symmetrie moet hebben. Beargumenteer dat de metriek dan de volgende vorm moet hebben:

$$(ds)^2 = g(t,r)c^2(dt)^2 - f(t,r)(dr)^2 - r^2(d\phi)^2 - Q(dz)^2 \quad (Q>0)$$

   waarbij r en ϕ poolcoordinaten zijn.

2. Laat zien dat we z zo kunnen herdefinieren dat Q gelijk wordt aan 1. Dit zullen we in het vervolg gebruiken.

3. Bereken de Ricci tensor $R_{\mu\nu}$.

4. Laat mbv R_{tr} zien dat $f(t,r)$ niet van t afhangt, dus $f(t,r) = f(r)$.

5. Gebruik R_{tt} en R_{rr} om te laten zien dat $g(t,r)f(r)$ niet van r afhangt. We mogen dus schrijven

$$g(t,r) = h(t)/f(r)$$

6. Gebruik $R_{\phi\phi}$ om te laten zien dat de enig mogelijke oplossing voor $f(r)$ een constante is, die we K zullen noemen (hint: 1/). Laat zien dat de metriek nu gegeven wordt door

$$(ds)^2 = \frac{h(t)}{K}c^2(dt)^2 - K(dr)^2 - r^2(d\phi)^2 - (dz)^2$$

   We zullen aannemen dat $K > 0$.

7. Laat zien hoe we een nieuwe tijdcoordinaat t' kunnen vinden zodanig dat

$$(ds)^2 = c^2(dt')^2 - K(dr)^2 - r^2(d\phi)^2 - (dz)^2$$

8. Laat zien hoe we nieuwe coordinaten r' en ϕ' kunnen definiëren zodanig dat

$$(ds)^2 = c^2(dt')^2 - (dr')^2 - (r')^2(d\phi')^2 - (dz)^2$$

9. Laat zien dat de kosmische snaar lokaal *geen* zwaartekracht uitoefent op een nabijgelegen puntdeeltje.

10. Laat het volgende merkwaardige feit zien: als je een pad rondom de snaar doorloopt varieert de hoek ϕ' in het algemeen *niet* van 0 tot 360 graden! De kosmische snaar heeft dus wel een *globaal* effect op de ruimte. Voor welke waarden van K is de totale afgelegde hoek *minder* dan 360 graden?

11. Laat K hierboven gevonden eigenschap hebben. Bekijk nu twee lichtstralen die evenwijdig aan elkaar de snaar naderen (in het $z = 0$ vlak). De ene lichtstraal passeert de snaar aan de linkerkant, de andere aan de rechterkant. Laat zien dat *na* het passeren van de snaar de lichtstralen niet langer evenwijdig lopen, maar elkaar naderen en uiteindelijk kruisen. Doe dit eventueel met een grafisch argument.

12. Geef aan hoe je zo'n kosmische snaar met een telescoop kunt waarnemen.